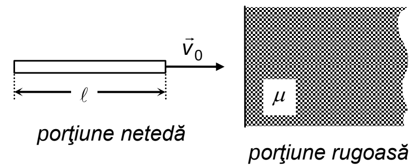
**1.** *O tijă paralelipipedică, omogenă, de lungime* $\ell = 1m$ *lunecă cu viteza* $v_0$ *pe o porţiune netedă (fără frecări) a unui plan orizontal, după care intră pe o porţiune rugoasă pe care coeficientul de frecare de alunecare dintre această porţiune şi tijă este* $\mu = 0{,}1$ *(vezi fig.).*




*a) Stabiliţi legea de variaţie în raport cu timpul a porţiunii* $x$ *din tijă care a pătruns pe porţiunea rugoasă.*

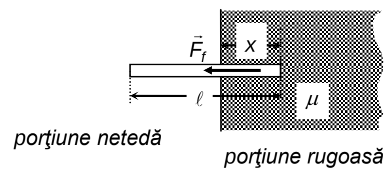
*b) Determinaţi timpul de frânare şi distanţa pe care pătrunde tija pe porţiunea rugoasă. Se vor studia cazurile :* $v_0 = 0{,}8\,m/s$ *şi* $v_0 = \sqrt{2}\,m/s$.

*Acceleraţia gravitaţională se va considera* $g = 10\,m/s^2$ .

a) Considerăm că tija a pătruns pe porţiunea rugoasă pe o distanţă $x$ şi se află în mişcare, aşa cum se vede în figură.

Tija fiind omogenă, forţa de frecare care acţionează asupra tijei este :

$$F_f = \frac{\mu m g}{\ell} x \text{, } \textbf{\textit{(0.5 puncte)}}$$




unde $m$ este masa tijei.

Principiul fundamental al dinamicii se scrie :

$$ma = -\frac{\mu m g}{\ell} x,$$

de unde :

$$a = -\frac{\mu g}{\ell} x \text{, } \textbf{\textit{(0.5 puncte)}}$$

relaţie care indică o mişcare oscilatorie armonică de pulsaţie :

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}} \text{ şi de perioadă } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} \text{. } \textbf{\textit{(0.5 puncte)}}$$

Legea coordonatei va fi :

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

iar legea vitezei :

$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Din condiţiile iniţiale :
pentru $t = 0$, $x = 0$ şi $v = v_0$ rezultă $\varphi_0 = 0$ şi $v_0 = \omega A$, de unde :

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} \text{. } \textbf{\textit{(0.5 puncte)}}$$

Cele două legi se scriu :

$$x = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{\ell}}\cdot t \text{ } \textbf{\textit{(0.5 puncte)}}$$

şi :

$$v = v_0\cos\sqrt{\frac{\mu g}{\ell}}\cdot t \text{. } \textbf{\textit{(0.5 puncte)}}$$

b) Pentru :

$\dfrac{mv_0^2}{2} \le \dfrac{m\omega^2\ell^2}{2}$ sau $v_0 \le \sqrt{\mu g \ell} = 1m/s$ tija se opreşte înainte de a pătrunde în întregime pe porţiunea rugoasă, sau, pentru semnul egal, chiar în momentul în care a pătruns în întregime pe porţiunea rugoasă.

În acest caz timpul de frânare va fi :

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$$ ***(0.5 puncte)***

şi distanţa pe care pătrunde tija pe porţiunea rugoasă:

$$d = A = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}.$$ ***(0.5 puncte)***

Dacă $v_0 = 0{,}8\,m/s < \sqrt{\mu g\ell} = 1\,m/s$, ne aflăm în această situaţie şi:

$t \approx 1{,}57\,s$ şi $d = 0{,}8\,m$. ***(0.5 puncte)***

Pentru :

$\frac{mv_0^2}{2} > \frac{m\omega^2\ell^2}{2}$ sau $v_0 > \sqrt{\mu g\ell} = 1\,m/s$ tija se opreşte după ce pătrunde în întregime pe porţiunea rugoasă. ***(0.5 puncte)***

În acest caz, momentul în care pătrunde tija în întregime pe porţiunea rugoasă se poate afla din prima soluţie pozitivă a ecuaţiei:

$$\ell = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{\ell}}\cdot t,$$ ***(0.5 puncte)***

adică :

$$t_1 = \sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}\arcsin\frac{\sqrt{\mu g\ell}}{v_0}$$ ***(0.5 puncte)***

Viteza pe care o va avea tija în momentul în care a pătruns în întregime pe porţiunea rugoasă o putem afla din legea conservării energiei:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m\omega^2\ell^2}{2} + \frac{mv'^2}{2},$$

de unde :

$$v' = \sqrt{v_0^2 - \mu g\ell}$$ ***,(0.5 puncte)***

moment în care acceleraţia se stabilizează la valoarea $a' = -\mu g$.

Timpul socotit din acest moment până la oprire este:

$$t_2 = \frac{v'}{\mu g} = \frac{\sqrt{v_0^2 - \mu g\ell}}{\mu g}$$ ***,(0.5 puncte)***

iar distanţa parcursă din acest moment până la oprire va fi :

$$d_2 = \frac{v'^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2 - \mu g\ell}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{\ell}{2}.$$ ***(0.5 puncte)***

Timpul total de frânare va fi :

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}\arcsin\frac{\sqrt{\mu g\ell}}{v_0} + \frac{\sqrt{v_0^2 - \mu g\ell}}{\mu g}$$ ***,(0.5 puncte)***

iar distanţa pe care pătrunde tija în porţiunea rugoasă :

$$d = \ell + d_2 = \ell + \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} + \frac{v_0^2}{2\mu g}$$ ***(0.5 puncte)***

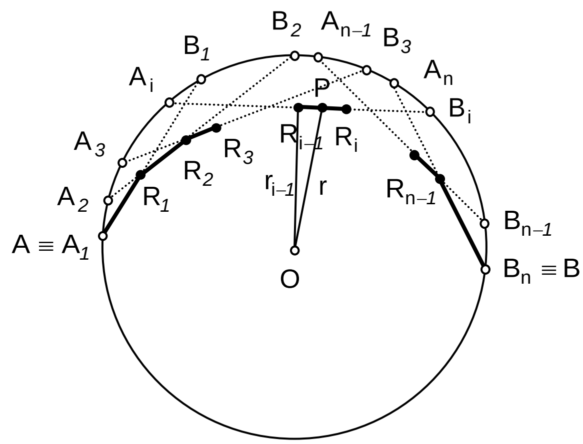
Dacă $v_0 = \sqrt{2}\,m/s > \sqrt{\mu g\ell} = 1\,m/s$ ne aflăm în această situaţie :

$t \approx 1{,}78\,s$ *şi* $d = 1{,}5\,m$. ***(0.5 puncte)***

*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.*

***Total: 9 puncte+1 punct (oficiu)=10puncte***

**2.** *Imaginaţi-vă un sistem* $n$ *de canale rectilinii forate între două puncte oarecare* $A$ *şi* $B$ *de pe suprafaţa Pământului* $AR_1, R_1R_2, R_2R_3, ..., R_{i-1}R_i, ..., R_{n-1}B$, *racordate între ele prin racordurile* $R_1, R_2, R_3, ..., R_{i-1}, R_i, ..., R_{n-1}$ *şi că un corp, lăsat liber în punctul* $A$*, se mişcă prin canale fără frecare către punctul* $B$*, trecând prin racorduri fără a-şi modifica modulul vitezei.*




*Consideraţi Pământul o sferă omogenă de rază* $R = 6400\,km$ *şi acceleraţia gravitaţională la suprafaţa Pământului* $g_0 = 10\,m/s^2$.

*a) Demonstraţi că mişcarea corpului pe oricare dintre canalele rectilinii este o mişcare oscilatorie armonică de aceeaşi pulsaţie* $\omega$ *şi deteminaţi această pulsaţie.*

*b) Arătaţi că între vitezele* $v_{i-1}$ *şi* $v$ *ale corpului în racordul* $R_{i-1}$ *şi în punctul* $P$*, aflat pe canalul rectiliniu* $R_{i-1}R_i$*, există relaţia* $v^2 - v_{i-1}^2 = \omega^2\left(r_{i-1}^2 - r^2\right)$*, unde* $r_{i-1}$ *şi* $r$ *sunt distanţele de la centrul Pământului la racordul* $R_{i-1}$*, respectiv la punctul* $P$.

*c) Folosind relaţia de mai sus, exprimaţi viteza corpului în punctul* $P$*, aflat la distanţa* $r$ *de centrul Pământului şi verificaţi dacă corpul ajunge până în punctul* $B$.

***Indicaţie:*** *Forţa de atracţie gravitaţională cu care o sferă omogenă acţionează asupra unui corp punctiform situat într-un punct din interiorul său este identică cu cea exercitată de un punct material plasat în centrul sferei, cu masa egală cu masa conţinută în sfera a cărei rază este distanţa de la centrul sferei la acel punct.*

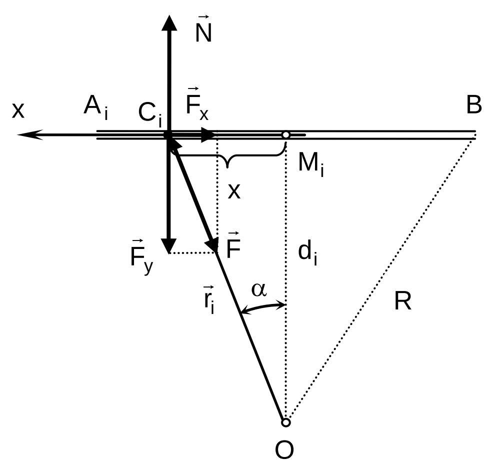
*Prof. Anton Pantelimon*

a) Fie canalul de ordin $i$ ale cărui prelungiri intersectează suprafaţa Pământului în punctele $A_i$ şi $B_i$ Considerăm secţiunea $OA_iB_i$ care conţine centrul $O$ al Pământului şi punctele $A_i$ şi $B_i$ şi fie $M_i$ mijlocul segmentului $A_iB_i$, iar $C_i$ poziţia corpului la un moment dat.

Notăm cu distanţa $C_iM_i = x$ şi cu $\vec{r}_i$ vectorul de poziţie al punctului $C_i$ în raport cu centrul Pământului.

În conformitate cu legea atracţiei gravitaţionale şi cu indicaţia din textul problemei, asupra corpului acţionează forţa:

$\vec{F} = -\gamma \dfrac{mM_i}{r_i^3}\vec{r}_i$ ***(0.5 puncte)*** şi reacţiunea canalului $\vec{N}$, unde $\gamma$ este constanta atracţiei universale, $m$ este masa corpului şi $M_i$ masa Pământului conţinută în sfera de rază $r_i$.




Cum Pământul se consideră omogen cu densitatea $\rho$:

$M_i = \dfrac{4\pi r_i^3}{3}\rho$, iar masa Pământului de rază $R$: $M = \dfrac{4\pi R^3}{3}\rho$.

Rezultă: $M_i = \dfrac{r_i^3}{R^3}M$ şi atunci forţa $\vec{F}$ devine:

$\vec{F} = -\gamma \dfrac{mM}{R^3}\vec{r}_i$ ***(0,5 puncte)***

Ţinând cont că acceleraţia gravitaţională la suprafaţa Pământului este $g_0 = \gamma \dfrac{M}{R^2}$ ***(0.5 puncte)*** se obţine:

$\vec{F} = -\dfrac{mg_0}{R}\vec{r}_i$ ***(0,5 puncte)***

Rezultanta celor două forţe va fi:

$F_x = -\frac{mg_0}{R} r_i \sin\alpha = -\frac{mg_0}{R} x$ ***(1 punct)*** , unde $x = C_i M_i$ reprezintă deplasarea faţă de poziţia $M_i$ de echilibru, iar semnul minus indică că această forţă este orientată în sens contrar acestei deplasări.

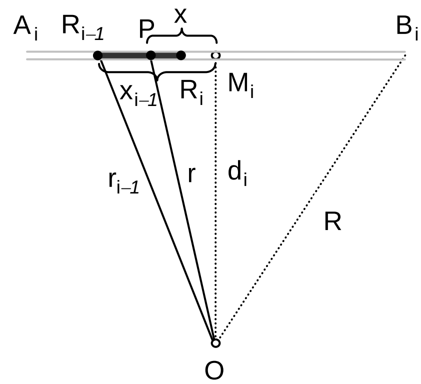
Cum $\frac{mg_0}{R} = k$ ***(0.5 puncte)*** reprezintă o constantă independentă de canalul rectiliniu pe care se mişcă corpul, rezultă că rezultanta forţelor care acţionează asupra acestuia este de tipul:

$F_x = -kx$ , adică o forţă de tip elastic, deci mişcarea corpului va fi o mişcare oscilatorie armonică. ***(0.5 puncte)***

Pulsaţia mişcării oscilatorii armonice este:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g_0}{R}} = \frac{1}{800} \mathrm{rad/s}$. ***(0.5 puncte)***

b) Între racordul $R_{i-1}$ şi puncul $P$, aplicăm pentru mişcarea oscilatorie armonică a corpului legea conservării energiei:




$\frac{kx_{i-1}^2}{2} + \frac{mv_{i-1}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$ ***(1 punct)***, în care înlocuind $k = m\omega^2$, obţinem:

$\omega^2\left(x_{i-1}^2 - x^2\right) = v^2 - v_{i-1}^2$ .***(0.5 puncte)***

Din triunghiurile dreptunghice $OM_iR_{i-1}$ şi $OM_iR_i$, rezultă:

$r_{i-1}^2 = x_{i-1}^2 + d_i^2$ şi $r^2 = x^2 + d_i^2$, ***(0.5 puncte)*** care scăzute membru cu membru conduc la:

$r_{i-1}^2 - r^2 = x_{i-1}^2 - x^2$ şi înlocuind, obţinem:

$v^2 - v_{i-1}^2 = \omega^2\left(r_{i-1}^2 - r^2\right)$.***(0.5 puncte)***

c) Dacă considerăm că punctul $P$ se află în racordul $R_i$, stabilim relaţia între vitezele pe care le are corpul la extremităţile canalului de ordin $i$:

$v_i^2 - v_{i-1}^2 = \omega^2\left(r_{i-1}^2 - r_i^2\right)$, unde $r_i$ este distanţa de la centrul Pământului la racordul $R_i$.

Aplicăm această relaţie pentru primele $(i-1)$ canale şi obţinem relaţiile:

$v_1^2 - 0 = \omega^2\left(R^2 - r_1^2\right)$

$v_2^2 - v_1^2 = \omega^2\left(r_1^2 - r_2^2\right)$

………………………..

$v_{i-1}^2 - v_{i-2}^2 = \omega^2\left(r_{i-2}^2 - r_{i-1}^2\right)$, la care adăugăm relaţia găsită la punctul b):

$v^2 - v_{i-1}^2 = \omega^2\left(r_{i-1}^2 - r^2\right)$. ***(1 punct)***

Adunăm membru cu membru cele $i$ relaţii şi găsim:

$v^2 = \omega^2\left(R^2 - r^2\right)$ sau:

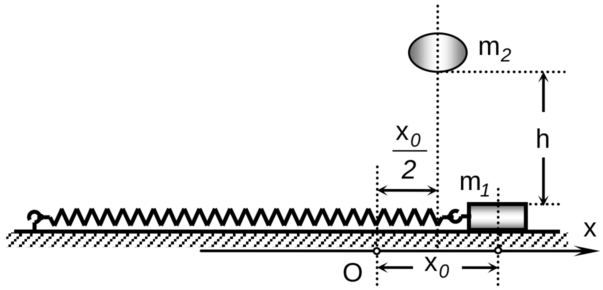
$v^2 = \frac{g_0}{R}\left(R^2 - r^2\right)$. ***(0.5 puncte)***

În punctul $B$, $r = R$ şi $v_B = 0$, deci corpul ajunge în $B$ cu viteză nulă. ***(0.5 puncte)***

*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.*

***Total: 9 puncte+1 punct (oficiu)=10puncte***

**3.** *Corpul de masă* $m_1 = 200\text{g}$, *prins de un resort cu constanta elastică* $k = 20\text{N/m}$, *se poate mişca fără frecare pe o suprafaţă orizontală. Se deplasează corpul pe distanţa* $x_0 = 4\text{cm}$ *faţă de poziţia* $O$ *de echilibru în sensul pozitiv al axei* $Ox$. *Pe verticala aflată la distanţa* $x_1 = \frac{x_0}{2}$ *faţă de poziţia de echilibru, deasupra suprafeţei orizontale, la înălţimea* $h$ *faţă de corpul de masă* $m_1$, *este menţinut în repaus un corp cu masa* $m_2 = 2m_1$, *aşa cum se vede în figura alăturată.*




*Eliberate simultan, cele două corpuri se ciocnesc plastic în momentul în care corpul de masă* $m_1$ *trece prima dată prin punctul aflat pe verticala corpului de masă* $m_2$. *Acceleraţia gravitaţională se consideră* $g = 9{,}8\text{m/s}^2$.

*Se cer:*

*a) Înălţimea* $h$ *la care s-a aflat corpul de masă* $m_2$ *în momentul eliberării.*

*b) Căldura eliberată în momentul ciocnirii corpurilor.*

*c) Legea elongaţiei şi a vitezei pentru mişcarea ansamblului celor două corpuri, alegând ca moment zero momentul cuplării celor două corpuri.*

*a)* Legea mişcării corpului de masă $m_1$ este:

$x = x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$, *cu* $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\text{rad/s}$. ***(0.5 puncte)***

La momentul $t = 0$, $x = x_0$ şi atunci $\sin\varphi_{01} = 1$, deci $\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}$.***(0.5 puncte)***

Determinăm momentul $t_1$ la care corpul de masă $m_1$ trece prima dată prin punctul aflat pe verticala corpului de masă $m_2$:

$\frac{x_0}{2} = x_0 \sin\left(\omega_1 t_1 + \frac{\pi}{2}\right)$ şi de aici găsim cea mai mică soluţie pozitivă $\omega_1 t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ şi $t_1 = \frac{\pi}{3\omega_1}$.***(1 punct)***

În acest timp corpul de masă $m_2$ cade liber de la înălţimea $h$, deci:

$h = \frac{g t_1^2}{2} = \frac{g\pi^2}{18\omega_1^2} \approx 0{,}054\text{m} = 5{,}4\text{cm}$.***(1 punct)***

b) Legea care exprimă viteza corpului de masă $m_1$ este:

$v = \omega_1 x_0 \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$, iar viteza acestuia la momentul $t_1$ va fi:

$v_1 = \omega_1 x_0 \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 x_0$.***(1 punct)***

Viteza corpului de masă $m_2$, orientată pe verticală, imediat înaintea ciocnirii este:

$v_2 = g t_1 = \frac{g\pi}{3\omega_1}$.***(1 punct)***

Căldura eliberată în momentul ciocnirii corpurilor va fi:

$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_1\left(\frac{v_1^2}{3} + v_2^2\right) = m_1\left(\frac{\omega_1^2 x_0^2}{4} + \frac{g^2\pi^2}{9\omega_1^2}\right) \approx 0{,}219\text{J}$.***(1 punct)***

c) Legile mişcării ansamblului celor două corpuri sunt de forma:

$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ şi $v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$, unde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\text{rad/s}$ .***(0.5 puncte)***

Imediat după ciocnirea plastică, la momentul $t = 0$, pentru această mişcare, elongaţia şi viteza ansamblului vor fi:

$x = \dfrac{x_0}{2}$ şi $v = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega_1 x_0$ .***(0.5 puncte)***

Din condiţii iniţiale, avem:

$A\sin\varphi_0 = \dfrac{x_0}{2}$ şi $\omega A\cos\varphi_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega_1 x_0$ sau:

$A\sin\varphi_0 = \dfrac{x_0}{2}$ şi $A\cos\varphi_0 = -\dfrac{x_0}{2}$. ***(0.5 puncte)***

Cele două relaţii ne arată că unghiul $\varphi_0$, pentru care $\text{tg}\varphi_0 = -1$, este în cadranul II, deci are valoarea $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{4}$. ***(0,5 puncte)***

Amplitudinea noii mişcări oscilatorii va fi:

$A^2 = \dfrac{x_0^2}{2}$ şi $A = \dfrac{x_0\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\text{cm}$. ***(0.5 puncte)***

Deci legile mişcării ansamblului celor două corpuri, alegând ca moment zero momentul cuplării celor două corpuri, sunt:

$x = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{10\sqrt{3}}{3}t + \dfrac{3\pi}{4}\right)[\text{cm}]$ şi $v = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}\cos\left(\dfrac{10\sqrt{3}}{3}t + \dfrac{3\pi}{4}\right)\left[\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$.***(0.5 puncte)***

*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.*

***Total: 9 puncte+1 punct (oficiu)=10puncte***